Mathematische Bemerkungen zu einem epidemiologischen Modell im Zusammenhang mit der Corona-Pandemie

M. Wolff

4. Mai 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Untersuchungen zum ursprünglichen Modell **1**
1.1 Beschreibung des Modells und Formulierung der Aufgabe 1
1.2 Zum Lösungsverhalten der Anfangswert-Aufgabe 3
1.3 Formulierung in entdimensionalisierter Form 5

2 Mögliche Erweiterungen des ursprünglichen Modells **7**
2.1 Beschreibung der Erweiterungen 7
2.2 Zum Lösungsverhalten der erweiterten Aufgabe 9
2.3 Erweiterte Aufgabe in entdimensionalisierter Form 10

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit entstand kurzfristig aus aktuellem Anlass der weltweiten Corona-Pandemie, die auch voll Deutschland erreicht hat. In (*Repro Rate Quaas*; 2020) hat Georg Quaas ein epidemiologisches Modell zur Corona-Epidemie in Deutschland vorgestellt und anhand verfügbarer realistischer Daten Rechnungen durchgeführt. Die mathematische Aufgabe hinter diesem Modell ist eine Anfangswert-Aufgabe für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, für das unter nicht zu strengen Voraussetzungen die Existenz einer einzigen globalen Lösung gezeigt wird. Des weiteren wird das Modell verallgemeinert, indem Immunisierungen durch Impfungen als auch ein Verlust der Immunität bei Genesenen berücksichtigt werden können.

1 Untersuchungen zum ursprünglichen Modell

Zuerst wird das aus der aktuellen Arbeit (*Repro Rate Quaas*; 2020) stammende ‚klassische epidemiologische Modell', abgekürzt als CEM, betrachtet.

1.1 Beschreibung des Modells und Formulierung der Aufgabe

Dieses Modell lautet mit anderer Schreibweise für die Ableitungen nach der Zeit sowie einer formalen Änderung.

$$\dot{S} = -\beta I \frac{S}{N_0 - D - R} \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{1.1}$$

$$\dot{I} = \beta I \frac{S}{N_0 - D - R} - \gamma I - \delta I \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{1.2}$$

$$\dot{R} = \gamma I \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{1.3}$$

$$\dot{D} = \delta I \qquad \text{auf } [0,\infty[. \tag{1.4}$$

In (*Repro Rate Quaas*; 2020) finden sich auf der rechten Seite von (1.2) als zweiter und dritter Term $\dot{R}$ bzw. $\dot{D}$. Hier haben wir diese Ausdrücke gemäß den Gleichungen (1.3) und (1.4) ersetzt, was keine wesentliche Änderung darstellt, jedoch das System (1.1) bis (1.4) in Standardform bringt.

Die auf dem Zeitintervall $[0,\infty[$ (auch ein endliches Intervall $[0,T]$ ist möglich) definierten Funktionen D, I, R, D sowie die Konstante N_0 mögen folgende Anzahlen von Personen bezeichnen:
$N_0 > 0$ - Bevölkerungsanzahl zum Anfang, also zum Zeitpunkt $t = 0$ (Verallgemeinerung auf Anfangspunkt $t = t_0$ ist möglich),

S - Anzahl der für eine Infektion Empfänglichen,
I - Anzahl der Infizierten und Ansteckenden,
R - Anzahl der Genesenen, für die Immunität angenommen wird, und der Immunen,
D - Anzahl der infolge der Infektion Verstorbenen.

Die Anfangsbedingungen werden wie folgt gewählt.

$$S(0) = S_0 \qquad \text{mit } 0 < S_0 < N_0, \tag{1.5}$$

$$I(0) = I_0 \qquad \text{mit } 0 < I_0 < N_0, \tag{1.6}$$

$$R(0) = R_0 \qquad \text{mit } 0 \leq R_0 < N_0, \tag{1.7}$$

$$D(0) = 0. \tag{1.8}$$

Einige mögliche Trivialfälle in den Anfangsbedingungen wurden der besseren Übersicht halber weggelassen. O.B.d.A. wählen wir in (1.8) die homogene Anfangsbedingung, da ein mögliches $D_0 > 0$ von N_0 abgezogen werden kann. Wird allerdings ein Anfangspunkt nach Beginn des Infektionsgeschehens gewählt, macht auch ein $D_0 > 0$ keine mathematischen Schwierigkeiten. Aus $I_0 = 0$ würde wegen (1.2) $I(t) = 0$ und somit $S(t) = S_0$, $R(t) = R_0$ und $D(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ folgen. Wäre $S_0 = 0$ und $I_0 > 0$, so bliebe S identisch null und I könnte nur zu Gunsten R und/oder D abnehmen. Das wäre auch bei $I_0 = N_0$ der Fall.

Es soll außerdem folgende Zusatzbedingung für die Anfangswerte gelten.

$$N_0 = S_0 + I_0 + R_0. \tag{1.9}$$

Die obige Aufgabe enthält noch die (im einfacheren Fall als konstant, sonst als zeitabhängig angenommenen) Parameter β („Infektionsrate“), γ („Genesungsrate“) und δ („Sterberate“), für die wir

$$\beta, \gamma, \delta \in C([0, \infty[), \qquad \beta(t) > 0,\ \gamma(t) > 0,\ \delta(t) > 0 \quad \text{für } t \geq 0 \tag{1.10}$$

voraussetzen, um im Rahmen stetig differenzierbarer Lösungen zu bleiben. Um die zugrunde liegende Anwendung im Blick zu behalten, fordern wir Positivität für diese Parameterfunktionen, was mathematisch gesehen keine Notwendigkeit ist (s. Bemerkung 1.1 (ii)).

In (*Repro Rate Quaas*; 2020) werden das der Anfangswertaufgabe (1.1) bis (1.8) zugrunde liegende Modell sowie die auftretenden Parameter und ihre Gewinnung aus gemessenen Daten für Deutschland ausführlich diskutiert. Ebenso finden sich in (Hethcote and van den Driessche; 2000) erklärende Ansätze und mathematische Untersuchungen für ein Infektionsgeschehens, bestehend aus Empfänglichen und Infizierten, die wieder empfänglich werden können.

Für ein besseres Verständnis des Modells gehen wir kurz auf die Interpretation ein.

Eine Erklärung zur Plausibilität des Modells kann gut mit der Gleichung (1.2) beginnen. Diese entsteht aus der Annahme, dass die Anzahl der Neuinfizierten während eines bestimmten Zeitraumes (also der Zuwachs von I) proportional der Anzahl der Infizierten zu Beginn dieses Zeitraumes ist, mit dem Proportionalitätsfaktor β („Infektionsrate“). Durch Grenzübergang für gegen null gehende Zeiträume erwächst dann eine gewöhnliche Differentialgleichung. β gibt an, um welchen Faktor die Anzahl der Infizierten innerhalb des betrachteten Zeitraumes zunimmt, was damit zusammenhängt, wie viele Empfängliche ein Infizierter innerhalb des besagten Zeitraumes ansteckt. β ist nicht mit der sogenannten Reproduktionszahl zu verwechseln, da eine Infizierter über einen längeren (oder kürzeren) Zeitraum ansteckend sein kann, s. (*Repro Rate Quaas*; 2020). Das hieraus resultierende exponentielle Wachstum ist nur zu Beginn realistisch, also für $S_0 \approx N_0$. In der Praxis wird das Wachstum durch die Abnahme von S zugunsten von I gebremst, daher tritt der Faktor $S/(N_0-D-R)$ auf. Außerdem verringert sich I auf Kosten von R und D, ebenfalls proportional der Anzahl der Infizierten mit den Faktoren γ und δ. Somit ergibt sich die Gleichung (1.2). Die übrigen drei Gleichungen ergeben sich dann sofort.

Wir möchten uns auf die sich ergebenden mathematischen Aspekte konzentrieren und schließen diesen Anschnitt mit zwei generellen Bemerkungen.

Bemerkungen 1.1. (i) Das durch (1.1) bis (1.8) beschriebene Modell ist ein kontinuierliches, somit steht der umfangreiche mathematische Apparat zu Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDl) zur Verfügung. Andererseits ist bei seiner Anwendung zur Untersuchung der Ausbreitung von Epidemien die Bevölkerung diskret. Das Modell setzt somit eine „hinreichend große“ Population voraus. Ähnlich sind die Fälle gelagert, wenn mit GDl z.B. das Wachstum von Bakterienkulturen oder chemische Reaktionen beschrieben werden. Eine Alternative wäre ggf. eine diskrete Modellierung mit Differenzengleichungen.

(ii) Die mathematische Behandlung der aus dem Modell erwachsenen Aufgabe erlaubt zeitabhängige Parameterfunktionen. Das kann bei der Abbildung des realen Infektionsgeschehens sinnvoll sein. So kann sicher die Infektionsrate β durch gezielte Maßnahmen im Verhalten der Menschen wie Kontakteinschränkungen und Abstandwahren zueinander gesenkt werden. Die anderen beiden Parameter, insbesondere δ, hängen möglicherweise vom Verlauf der Infektion ab, also davon, in welchen Bevölkerungsgruppen, z.B. nach dem Alter geordnet, die Infektion zuerst auftritt.

(iii) Ein genereller Nachteil der Modellierung mit GDl ist die fehlende Ortsabhängigkeit der gesuchten Funktionen, hier S, I, R und D. Der Blick auf eine Deutschlandkarte mit aktuellen Zahlen der Corona-Infizierten pro Bundesland oder pro Kreis zeigt ein sehr inhomogenes Bild (s. z.B. https://www.tagesschau.de/inland/coronavirus-karte-deutschland-101.html). Insofern kann das Modell (1.1) bis (1.8) nur die gemittelte Situation in Deutschland oder im einzelnen Bundesland angenähert beschreiben. Ein Ausweg über partielle Differentialgleichungen mit Termen, die eine Bewegung von Bevölkerungsteilen abbilden, scheint theoretisch möglich, stößt sicher auf große Schwierigkeiten beim Bestimmen der dann in wesentlich größerer Zahl auftretenden Parameterfunktionen. Ein solches Modell wären denjenigen zur Beschreibung von Diffusions-Reaktions-Prozessen ähnlich.

1.2 Zum Lösungsverhalten der Anfangswert-Aufgabe

Es sollen jetzt für die Aufgabe (1.1) bis (1.8) eine Lösung definiert und einige Resultate formuliert werden. Wir benutzen die mathematischen Standardbezeichnungen für Räume stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ sowie in $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), s. z.B. (Zeidler and Hunt; 2013). Zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDl) verweisen wir beispielsweise auf (Amann; 1995) oder (Walter; 2000).

Definition 1.2. (**Lokale und globale Lösung der Aufgabe** (1.1) **bis** (1.8))
Die reellen S_0, I_0, R_0 mögen den Bedingungen in (1.5) bis (1.7) sowie (1.9) genügen. Es seien $0 < t_E \leq \infty$ und

$$\beta, \gamma, \delta \in C([0, t_E[). \tag{1.11}$$

(i) Sei $0 < t_E < \infty$. Eine (Vektor-)Funktion $(S, I, R, D) \in C^1([0, t_E[, \mathbb{R}^4)$ heißt lokale Lösung der Aufgabe (1.1) bis (1.8), falls die Gleichungen (1.1) bis (1.4) sowie die Anfangsbedingungen (1.5) bis (1.8) erfüllt sind.

(ii) Sei $t_E = \infty$. Eine (Vektor-)Funktion $(S, I, R, D) \in C^1([0, \infty[, \mathbb{R}^4)$ heißt globale Lösung der Aufgabe (1.1) bis (1.8, falls die Gleichungen (1.1) bis (1.4) sowie die Anfangsbedingungen (1.5) bis (1.8) erfüllt sind.

Die mathematische Theorie bestätigt die naheliegende Vermutung, dass unter nicht zu starken Voraussetzungen die Aufgabe (1.1) bis (1.8) eine einzige globale Lösung besitzt, deren Komponenten alle nur Werte zwischen null und N_0 annehmen können. Zuerst lässt sich aus der Struktur der Gleichungen (1.1) bis (1.4) eine wichtige qualitative Eigenschaft einer möglichen (lokalen oder globalen) Lösung ableiten.

Lemma 1.3. (**Konstanz der Gesamtpersonenanzahl**)
Es gelte (1.9). Dann gilt für jede lokale Lösung $(S, I, R, D) \in C^1([0, t_E[, \mathbb{R}^4)$ der Aufgabe (1.1) bis (1.8) die Beziehung

$$S(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N_0 \qquad \text{für alle } t \in [0, t_E[. \tag{1.12}$$

Beweis. Die Addition der Gleichungen in (1.1) bis (1.4) ergibt folgende Differentialgleichung für die Summe $\Sigma := S + I + R + D$

$$\dot{\Sigma} = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0, t_E[. \tag{1.13}$$

Wegen der aus (1.9) folgenden Anfangsbedingung

$$\Sigma(0) = N_0 \tag{1.14}$$

ist dann $\Sigma \equiv N_0$ einzige Lösung der Aufgabe (**??**), (**??**). □

Zu beachten ist, dass die nach Beginn der Infektion Verstorbenen beim Bilden der Gesamtanzahl mitgezählt werden.

Unter der Bedingung (1.9) dürfen wir die Ausgangsaufgabe (1.1) bis (1.8) in folgender äquivalenter Weise umschreiben zu

$$\dot{S} = -\beta S \frac{I}{S+I} \quad \text{auf } [0,\infty[, \tag{1.15}$$

$$\dot{I} = \beta I \frac{S}{S+I} - \gamma I - \delta I \quad \text{auf } [0,\infty[, \tag{1.16}$$

$$\dot{R} = \gamma I \quad \text{auf } [0,\infty[, \tag{1.17}$$

$$\dot{D} = \delta I \quad \text{auf } [0,\infty[. \tag{1.18}$$

Der Vorteil ist technischer Art für die weiteren mathematischen Untersuchungen, in den ersten beiden Gleichungen treten R und D nicht mehr explizit auf.

Satz 1.4. (**Existenz einer einzigen globalen Lösung**)
Unter den Voraussetzungen (1.5) - (1.10), besitzt die Aufgabe (1.15) - (1.18), (1.5) - (1.8) genau eine globale Lösung $(S, I, R, D) \in C^1([0,\infty[, \mathbb{R}^4)$, die der Bedingung (1.12) genügt.
Für beliebiges $\widehat{t} > 0$ seien

$$\beta_{\widehat{t}} := \max_{t\in[0,\widehat{t}]}\{\beta(t)\}, \quad \gamma_{\widehat{t}} := \max_{t\in[0,\widehat{t}]}\{\gamma(t)\}, \quad \delta_{\widehat{t}} := \max_{t\in[0,\widehat{t}]}\{\delta(t)\}. \tag{1.19}$$

Dann gelten folgende Ungleichungen für alle $t \in [0, \widehat{t}]$:

$$0 < S_0 \exp(-\beta_{\widehat{t}}\,\widehat{t}) \le S(t) \le S_0 < N_0, \tag{1.20}$$

$$0 < I_0 \exp(-(\gamma_{\widehat{t}} + \delta_{\widehat{t}})\,\widehat{t}) \le I(t) < N_0, \tag{1.21}$$

$$0 \le R_0 \le R(t) < N_0, \tag{1.22}$$

$$0 \le D_0 \le D(t) < N_0. \tag{1.23}$$

Die Funktion S ist streng monoton fallend, die Funktionen R und D sind streng monoton steigend.

Beweis. Die Beweisidee besteht darin, zuerst eine einzige lokale Lösung nachzuweisen und diese dann auf ein beliebiges (Zeit-)Intervall $[0, \widehat{t}]$ fortzusetzen und parallel dazu die behaupteten Eigenschaften zu zeigen.
(i) (Existenz einer lokalen Lösung) Seien $\widehat{t} > 0$ beliebig fixiert Die rechten Seiten des Gleichungssystems (1.15) - (1.18) ergeben die (zeit- und ortsabhängige) (Vektor-)Funktion

$$F(S, I, R, D) := \Big(-\beta \frac{SI}{S+I}, \beta \frac{SI}{S+I} - \gamma\, I - \delta\, I, \gamma\, I, \delta\, I\Big). \tag{1.24}$$

Einer besonderen Betrachtung bedarf nur der nichtlineare Anteil $f(S, I) := {}^{SI}/_{S+I}$ wegen der Unstetigkeit im Punkt $(0, 0)$. Wegen $S_0 > 0$ ist f auf der abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R}^2$ $[{}^{S_0}/_2, 1 + S_0] \times [-{}^{S_0}/_4, 1 + S_0]$ Lipschitz-stetig. Damit ist F auf der abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$

$$[0, \widehat{t}] \times M(S_0) := [0, \widehat{t}] \times [\frac{S_0}{2}, 1 + S_0] \times [-\frac{S_0}{4}, 1 + S_0] \times [-\frac{S_0}{4}, 1 + S_0] \times [-\frac{S_0}{4}, 1 + S_0] \tag{1.25}$$

stetig und Lipschitz-stetig bezüglich (S, I, R, D), gleichmäßig bezüglich $t \in [0, \widehat{t}]$. Nach dem Satz von Picard und Lindelöf existiert dann genau eine lokale Lösung $(S, I, R, D) \in C^1([0, t_E[, M(S_0))$ der Aufgabe (1.15) - (1.18), (1.5) - (1.8) mit $0 < t_E \le \widehat{t}$. Mit anderen Worten, die Funktionswerte der lokalen Lösung liegen alle in der Menge $M(S_0)$. Die Zahl t_E hängt von $\widehat{t}$, vom Durchmesser der Menge $M(S_0)$ sowie vom Maximum der Norm $\|F\|$ der Funktion F sowie von der Lipschitz-Konstanten auf der Menge $[0, \widehat{t}] \times M(S_0)$ ab. Da wir die letzten beiden (endlichen) Werte nicht konkret benötigen, verzichten wir darauf sie genauer anzugeben.
(ii) (Eigenschaften der lokalen Lösung) Wir betrachten die lineare Hilfsaufgabe

$$\dot{u} = -\beta u \frac{I}{S+I} \quad \text{auf } [0, t_E[, \tag{1.26}$$

$$\dot{v} = \beta v \frac{S}{S+I} - \gamma v - \delta v \quad \text{auf } [0, t_E[, \tag{1.27}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = S_0, \qquad v(0) = I_0. \tag{1.28}$$

Da die Funktionswerte der lokalen Lösung für alle $t \in [0, t_E$ in $M(S_0)$ liegen, sind die Brüche in (1.26) und (1.27) stetige Funktionen, und die einzige Lösung dieser Hilfsaufgabe ist offenbar durch $u \equiv S$ und $v \equiv I$ gegeben.
Aus der Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen erhalten wir die Darstellungen

$$u(t) = S(t) = S_0 \exp\big(-\int_0^t \beta(x)\,\frac{I(x)}{S(x)+I(x)}\,\mathrm{d}x\big) \qquad \text{für } t \in [0, t_E[, \tag{1.29}$$

$$v(t) = I(t) = I_0 \exp\big(\int_0^t (\beta(x)\,\frac{I(x)}{S(x)+I(x)} - \gamma(x) - \delta(x))\,\mathrm{d}x\big) \qquad \text{für } t \in [0, t_E[. \tag{1.30}$$

Hieraus folgt sofort die Positivität von S und I auf $[0, t_E[$, wegen (1.17) und (1.18) sind dann R und D nicht negativ.
Lemma 1.3 gilt auch für die Aufgabe (1.15) - (1.18), (1.5) - (1.8). Somit gilt die Beziehung (1.12). Die Nicht-Negativität der Funktionen S, I, R und D erzwingt dann, dass alle durch N_0 beschränkt sind. Da S und I positiv sind, müssen alle Funktionen kleiner als N_0 sein.
Mit dem Wissen $I(t) > 0$ und $S(t) \geq {}^{S_0}/_2$ erhalten wir aus (1.29) die behauptete Ungleichungskette in (1.20), da zudem S monoton fallend ist. Mit ähnlichen Argumenten erhalten wir die restlichen Ungleichungen in (1.21) bis (1.23).
(iii) (Fortsetzung der lokalen Lösung auf $[0, \widehat{t}]$) Für das beliebig gewählte und fixiert $\widehat{t} > 0$ definieren wir die positive Zahl

$$\alpha_{\widehat{t}} := \min\big\{S_0,\, S_0 \exp(-\beta_{\widehat{t}}\,\widehat{t})\big\}. \tag{1.31}$$

Wir bemerken, dass wegen der erhaltenen Abschätzungen der Funktionswert $(S(t_E), I(t_E), R(t_E), D(t_E))$ definiert ist und ebenso in der Menge $M(S_0)$ liegt. Wir wählen eine neue Menge

$$M(S(t_E)) := [\frac{\alpha_{\widehat{t}}}{2}, 1+\alpha_{\widehat{t}}] \times [-\frac{\alpha_{\widehat{t}}}{4}, 1+\alpha_{\widehat{t}}] \times [-\frac{\alpha_{\widehat{t}}}{4}, 1+\alpha_{\widehat{t}}] \times [-\frac{\alpha_{\widehat{t}}}{4}, 1+\alpha_{\widehat{t}}]. \tag{1.32}$$

Wegen (1.31) ist $M(S(t_E))$ eine Teilmenge von $M(S_0)$, somit sind die Norm $\|F\|$ und die Lipschitz-Konstante auf $[t_E, \widehat{t}]$ durch ihre vorherigen Werte abschätzbar. Nach dem Satz von Picard und Lindelöf existiert dann eine Fortsetzung von $(S, I, R, D) \in C^1([0, t_E[, M(S_0))$ auf $t_E, t_E + t_E^{(1)}$ mit $t_E^{(1)} > 0$, die Lösung der Aufgabe (1.15) - (1.18), (1.5) - (1.8) ist. Die Zahl $t_E^{(1)} > 0$ hängt von $\widehat{t}$, $\alpha_{\widehat{t}}$ sowie von den oben angesprochenen Norm und Lipschitz-Konstanten ab. Für die zusammengesetzte Funktion $(S, I, R, D) \in C^1([0, t_E + t_E^{(1)}[, M(S_0))$ gelten dann die in Punkt (ii) erhaltenen Aussagen. Es zeigt sich, dass wiederum eine eindeutige Fortsetzung der Lösung auf $t_E + t_E^{(1)}, t_E + 2\,t_E^{(1)}$ möglich ist. Durch endlich viele Fortsetzungen mit gleicher Schrittlänge wird eine eindeutige Lösung der (1.15) - (1.18), (1.5) - (1.8) auf $[0, \widehat{t}]$ erhalten, die den Behauptungen des Satzes genügt.
(iv) (Fortsetzung der Lösung von $[0, \widehat{t}]$ auf $[0, \infty[$) Da $\widehat{t} > 0$ beliebig gewählt werden konnte, lässt sich die Lösung eindeutig auf jedes endliche Intervall fortsetzen, also auch auf $[0, \infty[$. □

1.3 Formulierung in entdimensionalisierter Form

Wir wollen uns jetzt näher mit den Dimensionen der beteiligten Funktionen und Parameter befassen und die Aufgabe (1.1) - (1.8) entdimensionalisieren, was bedeutet, sie in eine äquivalente Aufgabe zu überführen, die nur dimensionslose Größen enthält. Vorteile dieser Umformung sind allgemein eine Verringerung der die Aufgabe bestimmenden Parameter und Erhalt einer oft besser numerisch zu lösenden Aufgabe. Auch kann der Einfluss der Parameter in ihrer Wechselwirkung gut untersucht werden. Mehr hierzu z.B. in (Görtler; 1975), (Hutter; 2003), (Hutter and Jöhnk; 2004), (Zlokarnik; 2005), sowie kompakt in der Vorlesung (Wolff; 2018) (Kapitel 7).

Wir halten zuerst fest, dass alle Anzahlen von Personen, S, I, R, D und N_0, S_0, I_0, R_0 und D_0 die Dimension „Personen“, abgekürzt P, besitzen, als Einheiten kommen neben $e_P = 1\,Person$ auch andere infrage, wie etwa $100\,Personen$. Die Zeitableitungen der Anzahlfunktionen (s. Bemerkung 1.5 (i)) haben die Dimension ${}^{P}/_{T}$, wobei T die Dimension der Zeit ist, die im Zusammenhang mit Epidemien oft in Tagen gemessen wird. Mit diesen vorstehenden Informationen folgt, dass alle Parameter β, γ, δ die Dimension ${}^{1}/_{T}$ besitzen. Die „laufende“ Zeit bezeichnen wir mit t, selbstverständlich mit der Dimension T.

Wir setzen von nun an die Konstanz der Parameterfunktionen voraus (s. Bemerkung 1.5 (ii)), es sei also

$$\beta = const. > 0, \quad \gamma = const. > 0, \quad \delta = const. > 0. \tag{1.33}$$

Wir führen die Dimensionsanalyse anhand der Gleichungen (1.15) - (1.18) durch, da wir sinnvollerweise die Bedingung (1.9) voraussetzen und so Lemma 1.3 in Anspruch nehmen können. Dazu definieren wir die dimensionslose Zeit(-Zahl) (s. Bemerkung 1.5 (iii))

$$\tau := t\,\beta \tag{1.34}$$

und die dimensionslosen Funktionen s, ι, r und d gemäß

$$s(\tau) := \frac{S(t)}{N_0}, \qquad \iota(\tau) := \frac{I(t)}{N_0}, \qquad r(\tau) := \frac{R(t)}{N_0}, \qquad d(\tau) := \frac{D(t)}{N_0} \tag{1.35}$$

sowie die dimensionslosen Parameter (Kennzahlen)

$$\tilde{\gamma} := \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \tilde{\delta} := \frac{\delta}{\beta}. \tag{1.36}$$

Diese neuen Parameter genügen ebenso (1.33).

Dann sind die Gleichungen (1.15) - (1.18) entsprechend äquivalent zu

$$\dot{s} = -s\,\frac{\iota}{\iota + s} \qquad \text{auf } [0,\infty[\tag{1.37}$$

$$\dot{\iota} = \iota\,\frac{s}{\iota + s} - \tilde{\gamma}\,\dot{r} - \tilde{\delta}\,\dot{d} \qquad \text{auf } [0,\infty[\tag{1.38}$$

$$\dot{r} = \tilde{\gamma}\,\iota \qquad \text{auf } [0,\infty[\tag{1.39}$$

$$\dot{d} = \tilde{\delta}\,\iota \qquad \text{auf } [0,\infty[. \tag{1.40}$$

Dabei wurden die Ableitungen nach τ ebenfalls mit einem Punkt bezeichnet. Dazu kommen die aus (1.5) bis (1.8) resultierenden angepassten dimensionslosen Anfangsbedingungen

$$s(0) = s_0 := \frac{S_0}{N_0} \qquad \text{mit } 0 < s_0 < 1, \tag{1.41}$$

$$\iota(0) = \iota_0 := \frac{I_0}{N_0} \qquad \text{mit } 0 < \iota_0 < 1, \tag{1.42}$$

$$r(0) = r_0 := \frac{R_0}{N_0} \qquad \text{mit } 0 \le r_0 < 1, \tag{1.43}$$

$$d(0) = d_0 := \frac{D_0}{N_0} = 0. \tag{1.44}$$

Dann ist (1.9) äquivalent zu

$$1 = s_0 + \iota_0 + r_0. \tag{1.45}$$

Ist (s, ι, r, d) eine Lösung der Aufgabe (1.37) bis (1.44), so ist damit sofort durch

$$S(t) = N_0\,s(t\,\beta), \qquad I(t) = N_0\,\iota(t\,\beta), \qquad R(t) = N_0\,r(t\,\beta), \qquad D(t) = N_0\,d(t\,\beta) \tag{1.46}$$

eine Lösung der ursprünglichen Aufgabe (1.15) bis (1.18) und (1.5) bis (1.8) gegeben (und natürlich umgekehrt). Es ist auch klar, das Lemma 1.3 und Satz 1.4 mit leichten technischen Änderungen auch für die entdimensionalisierte Aufgabe gelten.

In vielen Fällen stellen die zugehörigen entdimensionalisierten Aufgaben eine *Vereinfachung* der äquivalenten ursprünglichen Aufgabe dar, was theoretische und numerische Untersuchungen erleichtern kann.

So erfolgt der Übergang von der Lösung der entdimensionalisierten Aufgabe zu Lösung der ursprünglichen mit der gleichen einfachen Skalierung für alle Komponenten ohne nennenswerten numerischen Aufwand.

Die entdimensionalisierte Aufgabe enthält in unserem Falle einen Parameter weniger als die ursprüngliche. Bis auf die Skalierung wird das Lösungsverhalten neben den Anfangswerten s_0, ι_0 und r_0 von $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\delta}$ bestimmt, also vom Verhältnis des ursprünglich gegebenen Parameters β zu γ und zu δ. Mit anderen Worten, wird die ursprüngliche Aufgabe mit neuen Parametern β_1, γ_1, δ_1 betrachtet, wobei die Quotienten ${}^{\gamma_1}\!/_{\beta_1}$ und ${}^{\delta_1}\!/_{\beta_1}$ gleich den entsprechenden Quotienten der Parameter β, γ, δ sind, ändert sich die Lösung der entdimensionalisierten Aufgabe nicht. In der Lösung der ursprünglichen Aufgabe zeigt sich nur eine Streckung oder Stauchung im zeitlichen Verlauf.

Bei komplexeren Aufgaben kann auch eine stärkere Reduzierung der Anzahl der Parameter auftreten. In der Folge können dann numerische Rechnungen und theoretische Untersuchungen einfacher werden.

Bemerkungen 1.5. **(i)** Es hat sich eingebürgert, dimensionslose Größen meist als Zahlen zu bezeichnen, wie beispielsweise in der Strömungsmechanik die Reynolds-Zahl oder die Mach-Zahl. Dem folgend werden die dimensionsbehafteten Personengruppen als Anzahlen, die in (1.35) erklärten dimensionslosen hingegen Zahlen genannt, so s als Empfänglichen-Zahl, ι als Infizierten-Zahl, r als Genesene-Zahl und d als Verstorbenen-Zahl.

(ii) Zeitabhängige Parameterfunktionen bereiten in der Dimensionsanalyse Schwierigkeiten, wenn es darum geht, ein dimensionsloses Gegenstück zu finden und sie mit einer endlichen Auswahl an Konstanten zu charakterisieren. Eine Möglichkeit besteht darin, rationale Funktionen zu nutzen. Beispielsweise kann eine Funktion auf $[0, \infty[$, die von $a_0 + a_1$ stetig gegen a_0 streben soll ($a_0, a_1 > 0$) durch $f(t) := a_0 + {}^{a_1}\!/_{1+t}$ dargestellt werden. In diesem Fall gäbe das zwei Parameter, a_0 und a_1, deren Dimension aus dem Kontext ersichtlich wird.

(iii) Die Auswahl einer dimensionslosen Zeit unterliegt einer gewissen Willkür, was Spielräume für unterschiedliche Anwendungen lässt. So könnten die Rolle von β auch γ oder δ einnehmen. Gibt es im Modell besondere Zeiten, z.B. die Dauer der Infektiosität t_I, s. (*Repro Rate Quaas*; 2020), so könnte τ auch gemäß $\tau := {}^{t}\!/_{t_I}$ definiert werden. Dabei ändern sich die Gleichungen im Detail. Die weiteren Untersuchungen müssen dann ergeben, welcher Ansatz vorteilhafter ist.

2 Mögliche Erweiterungen des ursprünglichen Modells

Das durch (1.1) bis (1.9) beschriebene Modell der Ausbreitung einer Infektion berücksichtigt nicht die Möglichkeit, dass sich Genesene erneut infizieren können, sie somit keine dauerhafte Immunität erworben haben könnten. Bezüglich der aktuellen Pandemie mit Covid19 gibt es noch keine gesicherten Ergebnisse über eine nach überstandener Infektion erworbene Immunität. Somit erscheint es sinnvoll, diese Möglichkeit im Modell zu berücksichtigen. Hierzu sei auch auf (Hethcote and van den Driessche; 2000) verwiesen, wo nur Empfängliche und Infizierte im Modell erfasst sind. Zum anderen wird im Abschnitt 1 auch nicht berücksichtigt, dass durch eine Impfung Empfängliche immun werden können. Wir möchten beide Möglichkeiten in das bestehenden Modell einfügen.

2.1 Beschreibung der Erweiterungen

Wir erweitern die Aufgabe (1.1) bis (1.9) in folgender Weise:

$$\dot{S} = -\beta I \, \frac{S}{N_0 - D - R} + \mu R - q\varphi(S) \qquad \text{auf } [0, \infty[, \tag{2.1}$$

$$\dot{I} = \beta I \, \frac{S}{N_0 - D - R} - \gamma I - \delta I \qquad \text{auf } [0, \infty[, \tag{2.2}$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R + q\varphi(S) \qquad \text{auf } [0, \infty[, \tag{2.3}$$

$$\dot{D} = \delta I \qquad \text{auf } [0, \infty[. \tag{2.4}$$

Es wurden somit in den Gleichungen (1.1) und (1.3) Terme hinzugefügt. Genesene können wieder für die Infektion empfänglich werden, was durch μR in (2.1) und in (2.3) ausgedrückt wird, wobei μ die „Entimmunisierungsrate“ ist. Die Funktion $q\varphi(S)$ beschreibt die „Impfrate“. Dabei ist q die eigentliche Rate, $\varphi(S)$ ist eine Steuerungsfunktion, genauere Angaben folgen weiter unten.

Die Gruppe R umfasst jetzt die Genesenen sowie die Immunen, sowohl die von Anfang an und die durch Impfen immunisierten. Es wäre auch möglich, eine separate Gruppe der Immunen zu betrachten, was zu mehr Rechenaufwand und einen zusätzlichen Parameter führen würde. Man muss jetzt beachten, dass anfänglich Empfängliche durch Impfung in die Gruppe der Genesenen gelangen können, ohne eine Infektion erlitten zu haben. In (2.3) wird jetzt durch $-\mu R$ und $q\varphi(S)$ berücksichtigt, dass Genesene wieder empfänglich werden können sowie dass ihre Gruppe Zuwachs von den immunisierten Empfänglichen erhalten kann.

Wir betrachten weiterhin das Zeitintervall $[0, \infty[$ und die Konstante N_0 die Bevölkerungsanzahl zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Anfangsbedingungen werden analog gewählt.

$$(2.5) \qquad S(0) = S_0 \qquad \text{mit } 0 < S_0 < N_0,$$

$$(2.6) \qquad I(0) = I_0 \qquad \text{mit } 0 < I_0 < N_0,$$

$$(2.7) \qquad R(0) = R_0 \qquad \text{mit } 0 \leq R_0 < N_0,$$

$$(2.8) \qquad D(0) = 0,$$

wobei gelte

$$(2.9) \qquad N_0 = S_0 + I_0 + R_0.$$

Die auftretenden Parameterfunktionen, alle mit der Dimension $^1\!/_T$, mögen den folgenden Bedingungen genügen.

$$(2.10) \qquad \beta, \gamma, \delta, \mu \in C([0, \infty[), \qquad \beta(t) > 0,\ \gamma(t) > 0,\ \delta(t) > 0,\ \mu \geq 0, \quad \text{für } t \geq 0$$

Einige Sonderfälle werden der Übersicht halber nicht betrachtet, führen jedoch auf mathematisch einfachere Aufgaben. So könnte die Impfrate q identisch null sein. Für $\mu = 0$ bleiben die Genesenen immun. Für q und μ identisch null, ergibt sich die einfachere Aufgabe (1.1) bis (1.9) im Abschnitt 1.

Der Term $q\varphi(S)$ in (2.1), die Impfrate, gibt an, wie viele Personen pro Zeiteinheit geimpft werden. Der Teil q stellt die eigentliche Impfrate dar, wenn genügend Personen zum Impfen vorhanden sind, was sicher zu Anfang einer Impfkampagne der Fall sein dürfte. Der Teil $\varphi(S)$ hat eine Steuerungsfunktion: Wenn keine zu impfenden Personen mehr da sind, wird auch nicht geimpft (s. weiter unten). Rein mathematisch würde sonst irgendwann die Funktion S negativ.

Für die eigentliche Impfrate q wird folgender möglicher Ansatz vorgeschlagen:

$$(2.11) \qquad q(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \in [0, t_1], \\ q_1 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, & \text{für } t \in [t_1, t_2], \\ q_1, & \text{für } t \in [t_2, \infty[. \end{cases}$$

Dabei seien

$$(2.12) \qquad 0 \leq t_1 < t_2 < \infty, \qquad q_1 = const. > 0.$$

Die Formel (2.11) bedeutet, dass für $t_1 = 0$ die Impfung mit der Infektionswelle beginnt, oder - im aktuellen Corona-Fall realistisch - für ein $t_1 > 0$ einsetzt und linear die endgültige Rate von q_1 erreicht. Letzteres scheint bei einem neuen, noch zu entwickelnden Impfstoff realistisch, da dessen Produktion angefahren und die Organisation der Impfung sicher verbessert werden müssen. Die Konstante q_1 hat die Dimension $^P\!/_T$.

Die Steuerungsfunktion $\varphi(S)$ soll sichern, dass das Impfen endet, wenn sich die Anzahl der empfängliche Personen null nähert. Wir definieren zuerst eine sogenannte (dimensionslose) Schnittfunktion φ_ε für beliebig gewähltes und dann fixiertes $\varepsilon > 0$:

$$(2.13) \qquad \varphi_\varepsilon(\sigma) := \begin{cases} 1, & \text{für } \sigma > \varepsilon, \\ \frac{\sigma}{\varepsilon}, & \text{für } 0 \leq \sigma \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{für } \sigma < 0. \end{cases}$$

Der Anstieg von φ_ε zwischen null und eins ist somit $^1\!/_\varepsilon$. Geht ε gegen null, so konvergiert φ_ε (punktweise, jedoch nicht gleichmäßig) gegen eine Sprungfunktion, die wir hier im Modell wegen ihre Unstetigkeit aus mathematischen Gründen vermeiden wollen.

Wir definieren dann abschließend für den Term $q\varphi(S)$:

$$(2.14) \qquad q(t)\,\varphi(S) := q(t)\,\varphi_1(\frac{S}{N_0}).$$

Aus Gründen der Dimensionshomogenität wurde $^S\!/_{N_0}$ als Argument von φ_1 gewählt, was sich später als vorteilhaft erweisen wird. Aus (2.13) und (2.14) folgt dann leicht:

$$(2.15) \qquad q(t)\,\varphi(S) = \begin{cases} q(t), & \text{für } \frac{S}{N_0} > \varepsilon, \\ \frac{S}{N_0\,\varepsilon}, & \text{für } 0 \leq \frac{S}{N_0} \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{für } S < 0. \end{cases}$$

Bei der Anwendung ist der Schwellenwert ε geeignet klein zu wählen. Da allgemein zu Beginn des Infektionsgeschehens $^S\!/_{N_0}$ nahe eins liegt, sollte ε klein sein, genauer $\varepsilon \ll {}^S\!/_{N_0}$, damit dieser Wert nicht das Modell zu Anfang stärker beeinflusst. Aus mathematischen Gründen wird die Funktion $\varphi(S)$ auch für negative S definiert. Da sich herausstellt, dass unter entsprechenden Bedingungen S nicht negativ wird, hat das für praktische Anwendungen keine Bedeutung.

2.2 Zum Lösungsverhalten der erweiterten Aufgabe

Es zeigt sich, dass die Existenz- und Einzigkeitsaussagen des Abschnitts 1.2 unter plausiblen Voraussetzungen aufrechterhalten werden können. Unter (2.9) bis (2.14) gilt Lemma 1.3 analog, und wir können $N_0 - D - R$ in den Nennern in (2.1) und (2.2) durch $S + I$ ersetzen, was für die mathematische Untersuchung günstiger ist. Wir untersuchen also die äquivalente Aufgabe

$$\dot S = -\beta S \,\frac{I}{I+S} + \mu R - q\,\varphi(S) \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{2.16}$$

$$\dot I = \beta I \,\frac{S}{S+I} - \gamma I - \delta I \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{2.17}$$

$$\dot R = \gamma I - \mu R + q\,\varphi(S) \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{2.18}$$

$$\dot D = \delta I \qquad \text{auf } [0,\infty[. \tag{2.19}$$

mit den Anfangsbedingungen (2.5) bis (2.8) sowie mit (2.9).

Es gilt ein zu Satz 1.4 analoger Satz über die Existenz einer einzigen globalen Lösung mit Abweichungen im Detail.

Satz 2.1. (**Existenz einer einzigen globalen Lösung**)
Unter den Voraussetzungen (2.5) - (2.14), besitzt die Aufgabe (2.16) - (2.19), (2.5) - (2.8) genau eine globale Lösung $(S, I, R, D) \in C^1([0,\infty[, \mathbb{R}^4)$, die der Bedingung

$$S(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N_0 \qquad \text{für alle } t \in [0, t_E[. \tag{2.20}$$

genügt. Für beliebiges $\widehat{t} > 0$ seien

$$\beta_{\widehat t} := \max_{t\in[0,\widehat t]}\{\beta(t)\}, \quad \gamma_{\widehat t} := \max_{t\in[0,\widehat t]}\{\gamma(t)\}, \quad \delta_{\widehat t} := \max_{t\in[0,\widehat t]}\{\delta(t)\}, \quad \mu_{\widehat t} := \max_{t\in[0,\widehat t]}\{\mu(t)\}. \tag{2.21}$$

Dann gelten folgende Ungleichungen für alle $t \in [0, \widehat{t}]$:

$$0 < S_0 \exp\Big(-(\beta_{\widehat t} + \frac{q_1}{N_0\,\varepsilon})\,\widehat t\Big) \le S(t) < N_0, \tag{2.22}$$

$$0 < I_0 \exp(-(\gamma_{\widehat t} + \delta_{\widehat t})\,\widehat t) \le I(t) < N_0, \tag{2.23}$$

$$0 \le R_0 \exp\Big(-\mu_{\widehat t}\,\widehat t\Big) \le R(t) < N_0, \tag{2.24}$$

$$0 \le D(t) < N_0. \tag{2.25}$$

Die Funktion D ist streng monoton steigend.

Beweis. Der Beweis des vorstehenden Satzes verläuft in den Bahnen des Beweises von Satz 1.4. Im Unterschied zur Aufgabe im Abschnitt 1.2 ist jetzt die Gleichung (2.16) für S komplexer. Um eine zu (1.20) analoge Abschätzung zu bekommen, werden die Terme μR und $q\varphi(S)$ so abgeändert, dass sich einerseits die gewünschte Abschätzung zeigen lässt und dass andererseits für $R \ge 0$ und $S > 0$ die ursprüngliche Gleichung (2.16) folgt. Wir definieren zwei Hilfsfunktionen:

$$F(R) := \begin{cases} R, & \text{für } R \ge 0, \\ 0, & \text{für } R < 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\Psi_\varepsilon(S) := \begin{cases} \frac{1}{S}, & \text{für } \frac{S}{N_0} > \varepsilon, \\ \frac{1}{N_0\,\varepsilon}, & \text{für } \frac{S}{N_0} \le 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Wir ersetzen nun die Gleichung (2.16) durch

$$\dot S = -\beta S \,\frac{I}{I+S} + \mu F(R) - q\,\Psi_\varepsilon(S)\,S. \qquad \text{auf } [0,\infty[, \tag{2.28}$$

Für $R \ge 0$ und $S > 0$ folgt sofort (2.16).
Dann können wir wie im ersten Schritt des Beweises zu Satz 1.4 eine einzige lokale Lösung der Aufgabe (mit (2.28) anstelle von (2.16)) erhalten, wobei insbesondere $S \ge S_0/2$ gilt. Dann betrachten wir analog zu (1.26) die lineare Hilfsaufgabe

$$\dot u = -\beta u \,\frac{I}{S+I} - q\,\Psi_\varepsilon(S)\,u + \mu F(R) \qquad \text{auf } [0, t_E[, \tag{2.29}$$

mit der ersten Anfangsbedingung in (1.28).
Mit analogen Argumenten erhalten wir dann aus der Lösungsformel für inhomogene lineare Differentialgleichungen die Darstellung

$$(2.30)\qquad u(t) = S(t) = \left(S_0 + \int_0^t \mu(\sigma)F(R(\sigma)) \exp\Big(\int_0^\sigma \big(\beta(s)\,\frac{I(s)}{S(s)+I(s)} + q(s)\Psi_\varepsilon(S(s))\big)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\sigma\right)\cdot$$
$$\cdot \exp\Big(-\int_0^t \big(\beta(x)\,\frac{I(x)}{S(x)+I(x)} + q(x)\Psi_\varepsilon(S)\big)\,\mathrm{d}x\Big) \quad \text{für } t \in [0, t_E[.$$

Hieraus folgt sofort die Positivität von S auf $[0, t_E[$ sowie die Ungleichung (2.22), danach folgen analog zum Beweis des Satzes 1.4 die weiteren Ungleichungen (2.23) bis (2.25).
Die weiteren Schritte im Beweis sind dann ebenfalls analog zu dem des Satzes 1.4. □

2.3 Erweiterte Aufgabe in entdimensionalisierter Form

Wir knüpfen an Abschnitt 1.3 an, indem wir möglichst viele Ansätze übernehmen. Zur besseren Lesbarkeit wiederholen wir auch Bezeichnungen. Wie vorher setzen wir von nun an die Konstanz der Parameterfunktionen voraus (s. Bemerkung 1.5 (ii)), es sei also

$$(2.31)\qquad \beta = const. > 0, \quad \gamma = const. > 0, \quad \delta = const. > 0, \quad \mu = const. > 0.$$

Wir führen die Dimensionsanalyse anhand der Gleichungen (2.16) - (2.19) durch, da wir sinnvollerweise die Bedingung (2.9) voraussetzen und so Lemma 1.3 in Anspruch nehmen können. Die dimensionslose Zeit(-Zahl) wird wie vordem definiert (s. Bemerkung 1.5 (iii))

$$(2.32)\qquad \tau := t\,\beta$$

und analog die dimensionslosen Funktionen s, ι, r, m und d gemäß

$$(2.33)\qquad s(\tau) := \frac{S(t)}{N_0}, \qquad \iota(\tau) := \frac{I(t)}{N_0}, \qquad r(\tau) := \frac{R(t)}{N_0}, \qquad d(\tau) := \frac{D(t)}{N_0}$$

sowie die dimensionslosen Parameter (Kennzahlen)

$$(2.34)\qquad \tilde\gamma := \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \tilde\delta := \frac{\delta}{\beta} \qquad \tilde\mu := \frac{\mu}{\beta}.$$

Diese neuen Parameter genügen ebenso (1.33).

Dann sind die Gleichungen (2.16) - (2.19) entsprechend äquivalent zu

$$(2.35)\qquad \dot s = -s\,\frac{\iota}{\iota+s} + \tilde\mu\,\dot r - \tilde q\varphi_\varepsilon(s) \qquad \text{auf } [0,\infty[$$
$$(2.36)\qquad \dot\iota = \iota\,\frac{s}{\iota+s} - \tilde\gamma\,\iota - \tilde\delta\,\iota \qquad \text{auf } [0,\infty[$$
$$(2.37)\qquad \dot r = \tilde\gamma\,\iota - \tilde\mu r + \tilde q\varphi_\varepsilon(s) \qquad \text{auf } [0,\infty[$$
$$(2.38)\qquad \dot d = \tilde\delta\,\iota \qquad \text{auf } [0,\infty[.$$

Die dimensionslose Funktion $\tilde q$ hat folgende Gestalt.

$$(2.39)\qquad \tilde q(\tau) := \begin{cases} 0, & \text{für } \tau \in [0,\tau_1], \\ \tilde q_1\,\frac{\tau-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}, & \text{für } \tau \in [\tau_1,\tau_2], \\ \tilde q_1, & \text{für } \tau \in [\tau_2,\infty[. \end{cases}$$

Dabei sind weitere dimensionslose Größen gegeben durch

$$(2.40)\qquad \tau_1 := \beta t_1, \qquad \tau_2 := \beta t_2, \qquad \tilde q_1 := \frac{q_1}{N_0\beta}.$$

Der Term $\tilde q\varphi_\varepsilon(s)$ lautet dann unter Beachtung von (2.13), (2.39) und (2.40)

$$(2.41)\qquad \tilde q(\tau)\varphi_\varepsilon(s(\tau)) = \tilde q(\tau) \begin{cases} 1, & \text{für } s(\tau) > \varepsilon, \\ \frac{s(\tau)}{\varepsilon}, & \text{für } 0 \le s(\tau) \le \varepsilon, \\ 0, & \text{für } s(\tau) < 0. \end{cases}$$

Schließlich gehören zur vollständigen entdimensionalisierten Aufgabe noch die aus (2.5) bis (4.10) resultierenden angepassten dimensionslosen Anfangsbedingungen

$$s(0) = s_0 := \frac{S_0}{N_0} \qquad \text{mit } 0 < s_0 < 1, \tag{2.42}$$

$$\iota(0) = \iota_0 := \frac{I_0}{N_0} \qquad \text{mit } 0 < \iota_0 < 1, \tag{2.43}$$

$$r(0) = r_0 := \frac{R_0}{N_0} \qquad \text{mit } 0 \leq r_0 < 1, \tag{2.44}$$

$$d(0) = d_0 := \frac{D_0}{N_0} = 0 \tag{2.45}$$

mit der zu (2.9) äquivalenten Bedingung

$$1 = s_0 + \iota_0 + r_0. \tag{2.46}$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass vier dimensionslose Funktionen, s, ι, r, d, gesucht werden, die von der dimensionslosen Zeit(-Zahl) τ abhängen. Die dimensionslosen Kennzahlen sind die drei Verhältnisse der ursprünglichen Raten, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\mu}$, die aus der Impfrate erwachsenen drei Kennzahlen τ_1, τ_2, $\tilde{q}_1$ mit dem Schwellenwert ε, sowie die dimensionslosen Anfangsbedingungen s_0, ι_0, r_0. Statt τ_2 könnte alternativ die Differenz $\tau_2 - \tau_1$ genommen werden.

Da der Zeitpunkt $t_1 > 0$ eines später einsetzenden Impfens wesentlich scheint, bei nicht zu kleinen Impfraten, könnte jetzt auch eine andere dimensionslose Zeit(-Zahl) definiert werden, nämlich $\omega := {}^{t}/_{t_1}$. Ausgehend von (2.32) und (2.33) ist dann die dimensionslose Aufgabe entsprechend zu ändern.

Die Dimensionsanalyse besagt, dass Charakteristika der dimensionslose Funktionen, s, ι, r, d wie etwa ein mögliches Maximum von ι oder Wendepunkte in den Kurven nur von den dimensionslosen Parametern abhängen können. Als Beispiel sei das mögliche Maximum der Anzahl der Infizierten sowie der Zeitpunkt seines Erreichens angeführt, für das dann (nach Rücktransformation auf Personen) gilt

$$I_{max} = N_0\, \iota_{max} = N_0\, \iota_{max}(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\mu}, \tau_1, \tau_2, \tilde{q}_1, s_0, \iota_0, r_0, m_0, \varepsilon), \tag{2.47}$$

$$t_{max} = \frac{\tau_{max}}{\beta} = \frac{1}{\beta}\, \tau_{max}(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\mu}, \tau_1, \tau_2, \tilde{q}_1, s_0, \iota_0, r_0, m_0, \varepsilon). \tag{2.48}$$

Für $\varepsilon \ll {}^{S}/_{N_0}$ kann der Einfluss von ε möglicherweise ausgeschlossen werden, wenn denn ι ein Maximum besitzt. Es ist Sache von praktischen Erfahrungen und numerischen Experimenten, den wirklichen Einfluss der Kennzahlen abzuschätzen.

Literatur

Amann, H. (1995). *Gewöhnliche Differentialgleichungen - 2., überarb. Aufl.*, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Görtler, H. (1975). *Dimensionsanalyse*, Springer-Verlag.

Hethcote, H. W. and van den Driessche, P. (2000). Two SIS epidemiologic models with delays, *Journal of Mathematical Biology* **40**(1): 3–26.

Hutter, K. (2003). *Fluid-und Thermodynamik: Eine Einführung*, 2nd edn, Springer.

Hutter, K. and Jöhnk, K. (2004). *Continuum Methods of Physical Modeling: Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence*, Springer.

Repro Rate Quaas (2020). Research Gate.

Walter, W. (2000). *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung*, 7th edn, Springer.

Wolff, M. (2018). *Mathematische Modellierung, Vorlesungsskript, Wintersemester 2017/2018*, Universität Bremen.

Zeidler, E. and Hunt, B. (2013). *Oxford Users' Guide to Mathematics*, reprint edn, Oxford University Press.

Zlokarnik, M. (2005). *Scale-up - Modellübertragung in der Verfahrenstechnik, 2.Aufl.*, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, Germany.